Algebra liniowa z geometrią analityczną - studia stacjonarne
lista 2 - 24 luty 2020

__Temat__: *macierz, działania na macierzach, macierze elementarnych przekształceń, macierz odwrotna*

1. Podaj rozmiary macierzy A, B, C takie, aby można było obliczyć:
$$AB + ACB.$$

2. Niech
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$
Sprawdź, że $AB \neq BA$.

3. Niech
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Sprawdź, że
$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad AD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Niech
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Oblicz $B = EA$ i zauważ, że ostatni wiersz macierzy B jest sumą ostatniego wiersza macierzy A i pierwszego wiersza macierzy A pomnożonego przez 3. Jak można zinterpretować iloczyny AE, PA, AP?

5. Sprawdź, że prawdziwe są następujące równości:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

6. Dane są macierze
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
Wykonaj każde z następujących działań lub uzasadnij, że nie jest to możliwe:
$$A^T A - C^T C, \quad 2B - A^T A, \quad BA^T + 3A, \quad AB - A.$$

7. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Oblicz macierz odwrotną A^{-1} oraz $A^2 - 2A + I$.

Uwagi. $A^2 = AA$.
Mówimy, że macierz X jest odwrotna do macierzy kwadratowej A jeśli $AX = I$. Macierz odwrotną oznaczamy tak: A^{-1}. Nie dla każdej macierzy istnieje macierz do niej odwrotna.

8. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy przekątniowej $A = \mathrm{diag}(-1, 2, 3)$.

Dodatkowe zadania

1. Sprawdź, czy następujące macierze są ortogonalne, tzn. czy $A^{-1} = A^T$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Niech I będzie macierzą jednostkową stopnia 2 i niech

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz macierze X, Y, Z, W takie, że $AX = I, BY = I, CZ = I, AW = B$. Czy wyznaczone macierze X, Y, Z, W spełniają równania $XA = I, YB = I, ZC = I, WA = B$? Dlaczego? Czy macierze X, Y, Z, W są określone jednoznacznie i czy mają coś wspólnego z macierzami odwrotnymi? Co będzie jeśli w macierzach B i C element na pozycji $(1, 1)$ zastąpimy zerem?

3. Niech $x = [x_1, \ldots, x_n]^T, y = [y_1, \ldots, y_n]^T$ będą dwoma macierzami rozmiaru $n \times 1$. Oblicz następujące iloczyny macierzy xy^T, x^Ty.

4. Niech

$$J_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Sprawdź, że iloczyny $J_k J_k^T = J_k^T J_k$ dla $k = 1, 2$ są równe macierzy jednostkowej stopnia 2. Oblicz $x = J_1[1, 0]^T$ oraz $y = J_1[0, 1]^T$. Zaznacz na płaszczyźnie wektory jednostkowe $[1, 0]^T, [0, 1]^T$ oraz wektory x, y. Jaka jest interpretacja geometryczna wektorów x, y? To samo wykonaj dla macierzy J_2.

5. Niech $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}, B \in \mathbb{R}^{4\times 5}, C \in \mathbb{R}^{5\times 2}, D \in \mathbb{R}^{4\times 2}, E \in \mathbb{R}^{5\times 4}$. Które z poniższych macierzy X są dobrze określone i jaki jest ich rozmiar

$$X = BA, \quad X = AC + D, \quad X = AE + B, \quad X = AB + B,$$

$$X = E(A + B), \quad X = E(AC), \quad X = E^T A, \quad X = (A^T + E)D?$$

6. Niech $a = 4$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Sprawdź, że

$$a(B-C) = aB - aC, \qquad A(aB) = a(AB), \qquad A(B-C) = AB - AC,$$
$$(A^T)^T = A, \qquad (A+B)^T = A^T + B^T, \qquad (AB)^T = B^T A^T.$$

Test do zrobienia w domu !!!!:

zob. Pomocnicze materiały internetowe

`http://wazniak.mimuw.edu.pl/`

(testy do ćwiczeń z Algebry Liniowej z Geometrii Analitycznej)

(a) Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

Czy prawdą jest, że

- $2A + B = D$.
- $AB^T = BA^T$.
- $A^T = C$.

(b) Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Czy prawdą jest, że

- $B = A^{-1}$.
- $B^T = A^{-1}$.
- $A^T = B^{-1}$.

(c) Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Czy prawdą jest, że

- $A^2 = I$.
- $A^4 = I$.
- $A^3 = A^{-1}$.
- $A^3 = A^T$.

Krystyna Ziętak